Journal of Applied and Computational Sciences in Mechanics,34 2022. (19-34)

Ferdowsi University of Mashhad

Journal of Applied and Computational Sciences in Mechanics

Page Journal: mechanic-ferdowsi.um.ac.ir

The Effects of Winkler-Pasternak Foundation Coefficients on the Natural Frequency of Cylindrical Lattice Structures Using Galerkin Method

Research Article

Amir Hossein Hahemian[1], Ehsaneh Mohammadpour Hamedani[2]

DOI: 10.22067/jacsm.2022.73646.1069

1. Introduction

Modern composite materials, which are widely used in the structure of spacecraft and rockets due to their high strength, are now widely considered in the commercial airframe bodies. About 40 years ago, the first generation of composite structures was made from the combination of aluminum and carbon-epoxy structures. In this article, the governing equation for free vibrations of a lattice cylindrical composite shell is presented as a formula. The lattice shell consists of a large number of helical and circumferential ribs and is modeled as a continuous orthotropic thin cylinder with variable stiffness. The cylinder is considered with different boundary conditions and the solution of the dynamic equations of the shell is based on Fourier and Galerkin Decomposition Methods. By using these methods, analytical formula presented for calculating the fundamental frequency of the lattice structure is made starting from a specific density of the lattice structure and does not depend on the number of helical ribs. This result is verified by Finite Element Analysis (FEM). The applications of this formula are for determining the parameters of lattice structures and designing composite lattice shells based on fundamental frequencies. In this study, the governing equations for free vibrations of a lattice composite structure are analytically obtained by the Galerkin method and also the results of the analytical method are compared with the results of the FEM.

2. Governing equations

In this study, the governing equations of the lattice structure shell are derived and then the equation of Winkler-Pasternak foundation are added, which forms a new governing equation. The new governing equation is solved. The composite lattice cylindrical structure is considered as it is surrounded by a linear, homogeneous and elastic foundation in the axial direction from the outer radius. The Winkler-Pasternak foundation can be assumed as radial and shear layer springs with two stiffness coefficients K and G in the longitudinal axes. Since it is assumed that the springs have pure displacement, they are completely independent and have no combined and coupling effects on each other.

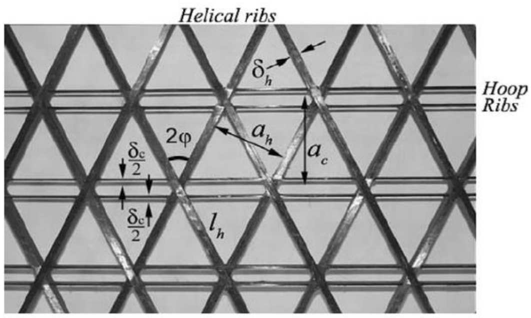


Figure 1. Parameters of the lattice structure

The equation of motion is derived using the classical theory of orthotropic cylindrical shells. Figure 1 shows the geometrical parameters of the lattice structure. The Winkler-Pasternak foundation term can be added to the third term of Equation 1;

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial N_\alpha}{\partial \alpha}+\frac{\partial N_{\alpha\beta}}{\partial \beta}-B_\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0\\
&\frac{\partial N_{\alpha\beta}}{\partial \alpha}+\frac{\partial N_\beta}{\partial \beta}+\frac{1}{R}\frac{M_{\alpha\beta}}{\partial \beta}+\frac{1}{R}\frac{M_\beta}{\partial \beta}-B_\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=0\\
&\frac{\partial^2 M_\alpha}{\partial \alpha^2}+\frac{\partial^2 M_{\alpha\beta}}{\partial \alpha\partial \beta}+\frac{\partial^2 M_\beta}{\partial \beta^2}-\frac{N_\beta}{R}-B_\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=Kw-G\nabla^2 w
\end{aligned}
\tag{1}
$$

By solving the obtained equation with the assumed boundary conditions, the natural frequency is obtained for the lattice cylindrical shell rest on the Winkler-Pasternak elastic foundation. Now, trigonometric series can be used to find the response of the change of location along the circumference of the cylinder, which is repeated alternatively. The obtained formula is a direct relationship to obtain the natural frequency of a cylindrical lattice shell considering the Winkler-Pasternak elastic foundation,

---

*Manuscript received: ; Revised, , Accepted, .

[1]. Corresponding author: Assistant Professor, Department of Aerospace Engineering, Islamic Azad University, Science and Research Branch, Tehran, Iran. **Email**: amir_hashemian@srbiau.ac.ir

[2]. MSc, Department of Aerospace Engineering, Islamic Azad University, Science and Research Branch, Tehran, Iran

which can be used in the design of lattice structures to reduce calculation time.

3. Numerical results and verifications

In order to obtain a unit model, it is considered that for the foundation a series of springs can be considered as spring elements along the radius of the cylindrical shell in the outer part as Winkler and Pasternak parameters. The results showed that by adding an elastic foundation, the Winkler and Pasternak modulus coefficients have a great effect on increasing the natural frequencies of the lattice structure. By deriving the governing equations with boundary conditions, using the Galerkin method, it is obtained with and without an elastic foundation, and it is in good agreement with the results of the FEM. Figure 2 shows that the results obtained from the analytical solutions are in good agreement with the results of reference 4 for the lattice structure without elastic foundation. It also shows that the results of the analytical solutions considering the elastic foundation are in good agreement with the results of the FEM.

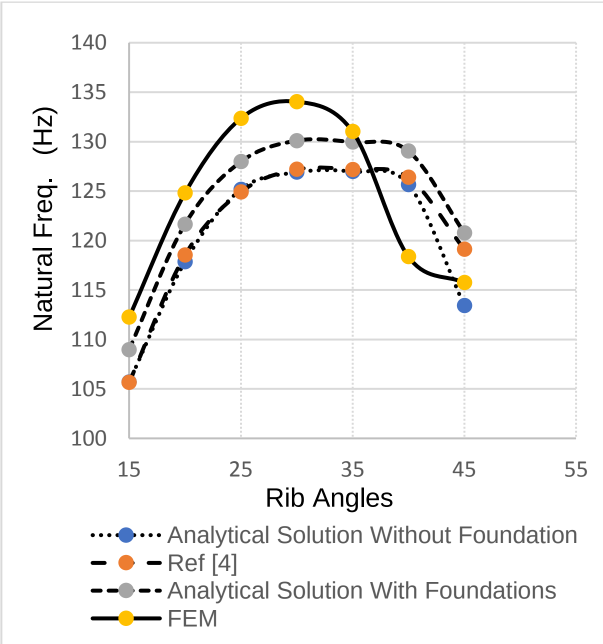


Figure 2. Comparison of Natural Frequencies of a Lattice Structure with/without Winkler-Pasternak Foundation with n_s=48 Ribs

Four mode shapes are shown in Figure 3 for values of k = 100 and G = 0 N/m³. The changes of the Winkler coefficient of the elastic foundation, K, from 0 to 2×10^6 and its effect on the fundamental frequency are shown.

4. Conclusion

The problem of free vibrations of the composite lattice cylindrical shell surrounded by the Winkler-Pasternak foundation is raised with different boundary conditions. Assuming the characteristics of effective orthotropic stiffness, the continuous model was replaced with a lattice structure, and the analytical formula was obtained using the Fourier and Galerkin method.

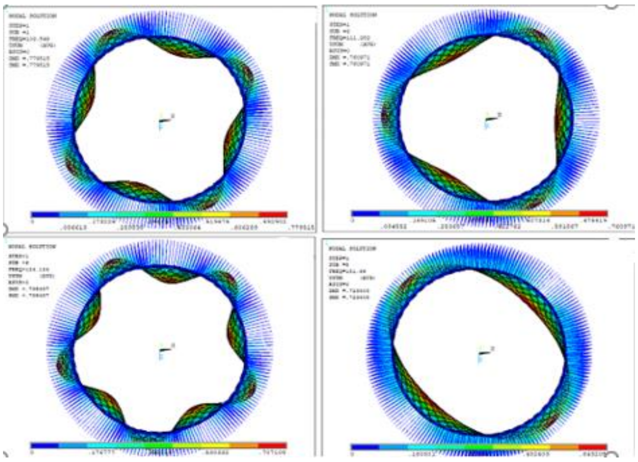


Figure 3. First, third, fifth and seven mode shapes

The continuous formula for the natural frequencies of the lattice shell enclosed in an elastic medium was solved and the results were checked and verified using the FEM. For FEM simulations, Winkler and Pasternak characteristic coefficients were replaced by shear and radial springs, respectively. The natural frequency of the base of the system depends on the characteristics of the elastic foundation, so changing the stiffness of the radial and shear springs causes change in the natural frequencies. It was observed that by increasing the stiffness of the springs, more stability in the system can be expected. The effectiveness of the analytical formula was checked and verified using numerical calculations. The obtained parametric formula can prove its efficiency and suitability for obtaining the free vibrations of the cylindrical lattice structure which are equalized by the Winkler-Pasternak foundation with radial and shear springs for analysis and also possible design. The designer can calculate the effects of changing materials, density, structure length, structure diameter, fiber texture angle, and the number of ribs in the substrate required for different missions and frequency control without spending significant time and money. By increasing the stiffness of shear and radial springs, it is possible to obtain the desired stability for sensitive aerospace structures. Increasing the length in the structure causes the natural frequency to decrease. Therefore, by designing a suitable foundation, sufficient stability is obtained for it.

علوم کاربردی و محاسباتی در مکانیک

http://mechanic-ferdowsi.um.ac.ir

تاثیر ضرایب بستر وینکلر-پاسترناک بر فرکانس طبیعی سازه مشبک به روش گالرکین*

مقاله پژوهشی

امیرحسین هاشمیان[(۱)]   احسانه محمدپور همدانی[(۲)]

DOI: 10.22067/jacsm.2022.73646.1069

چکیده *سازه‌های مشبک کامپوزیتی از پرکاربرترین سازه‌ها در صنایع هوایی در سالهای اخیر می‌باشند. این سازه‌ها از تعداد زیادی دنده مایل و محیطی با فواصل مشخص از یکدیگر تشکیل شده و علاوه بر استحکام، از نظر وزنی بسیار سبک می‌باشند. مطالعه حاضر شامل یک بیان تحلیلی و راه حل برای مسئله ارتعاشات آزاد یک پوسته استوانه‌ای مشبک کامپوزیت می‌باشد. فرمول پیوسته‌ای برای محاسبه فرکانس طبیعی سازه مشبک استوانه‌ای با در نظر گرفتن بستر الاستیک وینکلر-پاسترناک از معادلات حاکم بر پوسته بر اساس روش فوریه و گالرکین حاصل گردید. نتایج بدست آمده در دو حالت بدون بستر و با بستر الاستیک بصورت تحلیلی محاسبه گردیده و صحت نتایج توسط مدل‌سازی به روش اجزای محدود مورد تأیید قرار گرفته است. برای شبیه سازی‌های روش اجزای محدود، ضرایب ویژگی‌های وینکلر و پاسترناک به ترتیب با فنرهای برشی و شعاعی جایگزین شده‌اند. فرکانس طبیعی پایه سیستم به ویژگی های بستر الاستیک بستگی داشته، بنابراین تغییر سختی فنرهای شعاعی و برشی باعث ایجاد تغییر در فرکانس‌های طبیعی می‌شود. روشهای ارایه شده در این مطالعه، علاوه بر آنکه برای تخمین فرکانس در مرحله طراحی اولیه بکار می‌رود، همچنین ابزاری برای ارزیابی تحلیل ارتعاشات پوسته استوانه‌ای مشبک کامپوزیت در تجزیه و تحلیل مکانیکی می‌باشد.*

واژه‌های کلیدی سازه مشبک کامپوزیتی، فرکانس طبیعی، روش فوریه، روش گالرکین، اجزای محدود

The Effect of Winkler-Pasternak Foundation Coefficients on the Natural Frequency of Cylindrical Lattice Structures Using Galerkin Method

Amir Hossein Hashemian   Ehsaneh Mohammadpour Hamedani

Abstract Composite Lattice structures are one of the most widely used structures in the aerospace industry in recent years. These structures are composed of a large number of oblique and circumferential ribs with specific distances from each other and in addition to strength, they are very light in terms of weight. The present study includes an analytical expression and a solution to the problem of free vibrations of a composite lattice cylindrical shell. The continuous formula for calculating the natural frequency of a cylindrical lattice structure was obtained by considering the Winkler-Pasternak elastic foundation from the governing equations of the shell based on Galerkin methods. This formula, in addition to being used to estimate the frequency in the initial design phase, is also a tool for evaluating the vibration analysis of composite lattice shells in mechanical analysis. The results have been calculated analytically in two cases with and without elastic foundation and the accuracy of the results has been confirmed by finite element modeling. For finite element method simulations, Winkler and Pasternak coefficients have been replaced by shear and radial springs, respectively. The natural base frequency of the system depends on the properties of the elastic substrate, so changing the stiffness of the radial and shear springs causes a change in the natural frequencies.

Keywords Lattice Composite Structure, Natural Frequency, Fourier Method, Galerkin method, FEM

* تاریخ دریافت مقاله۱۴۰۰/۸/۲۴ و تاریخ پذیرش آن ۱۴۰۱/۵/۱ می‌باشد.

(۱) نویسنده مسئول، استادیار، گروه مهندسی هوافضا، واحد علوم وتحقیقات، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران **Email**:amir_hashemian@srbiau.ac.ir

(۲) کارشناسی ارشد، گروه مهندسی هوافضا، واحد علوم وتحقیقات، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران

مقدمه

مواد کامپوزیتی مدرن که از خاصیت استحکام بالای آن‌ها در ساخت فضاپیماها و راکت‌ها به صورت گسترده‌ای استفاده می‌شود، هم‌اکنون بطور وسیعی در ساخت بدنه هواپیماهای تجاری مورد توجه قرار گرفته است. در حدود ٤٠ سال قبل اولین نسل از سازه‌های کامپوزیتی از ترکیب سازه‌های آلومینیومی وکربن– اپوکسی ساخته شده است. اصلی‌ترین موضوع در جریان ساخت سازه‌های مشبک چگونگی اختصاص کیفیت مناسب و خواص مکانیکی مشابه برای تمام دنده‌ها است که اعضاء اصلی تحمل بارها هستند. یک سازه مشبک کامپوزیتی که به خوبی طراحی شده باشد دارای خاصیت خود تعادلی است. قسمت نیروهای فشاری و محوری دنده‌های مایل نیروی فشاری را به دنده‌های محیطی و نیروی تنش محیطی تبدیل می‌کند و یا در پوسته اثری شبیه به فشار داخلی القا شده است، لذا فشار داخلی که سبب حفظ شکل و تعادل فرم‌دهنده‌های مایل است، حساسیت پوسته را به صورت تغییر شکل نامطلوب کاهش داده و یا به عبارتی آستانه نیروی بحرانی قابل افزایش است. لذا نو آوری در مدل‌سازی یا فرمول های سریع تحلیلی در بررسی های اولیه در طراحی و ساخت این سازه‌های پیچیده مورد توجه محققان بسیای قرار گرفته است. در این مقاله معادله حاکم بر ارتعاشات آزاد یک پوسته استوانه‌ای مشبک کامپوزیتی بصورت فرموله شده ارائه گردیده است. پوسته مشبک از تعداد زیادی دنده‌های مارپیچ و دنده‌های حلقه‌ای تشکیل گردیده و بصورت یک استوانه نازک ارتوتروپیک پیوسته با سختی متغیر مدل‌سازی شده است. استوانه با شرایط مرزی مختلف در نظر گرفته شده و حل معادلات دینامیکی پوسته بر اساس روش تجزیه فوریه و گالرکین می‌باشد. با استفاده از روش‌های بکار رفته، فرمول تحلیلی ارائه شده برای محاسبه فرکانس اساسی سازه مشبک، با شروع از تراکم خاصی از ساختار مشبک صورت پذیرفته و به تعداد دنده‌های مورب بستگی ندارد. این نتیجه با استفاده از تجزیه و تحلیل اجزای محدود

مورد تأیید قرار می‌گیرد. کاربردهای این فرمول برای تعیین پارامترهای سازه‌های مشبک و طراحی پوسته‌های مشبک کامپوزیتی بر اساس فرکانس‌های اساسی می‌باشد. بررسی‌های عددی ارائه شده نشانگر فرمول تحلیلی کارآمد و ابزاری برای محاسبه سریع فرکانس اساسی است که می‌تواند برای ارزیابی سختی ساختاری پوسته‌های مشبک کامپوزیتی در تجزیه و تحلیل طراحی استفاده گردد. به طور معمول، تجزیه و تحلیل مکانیکی پوسته های استوانه‌ای مشبک با استفاده از مدل‌های پیوسته و یا مدلهای گسسته انجام می شود. در مدل پیوسته، سیلندر مشبک با پوسته ارتوتروپیک پیوسته، "شبه معادل" جایگزین می‌گردد، که دارای پارامترهای سختی موثر وابسته به پوسته مشبک اصلی می-باشد. استفاده از این روش به دلیل سادگی نسبی آن به طور گسترده‌ای در تجزیه و تحلیل و طراحی پوسته‌های مشبک کامپوزیت استفاده می‌شود. مقالات متعددی از مدل‌های مختلف پیوسته‌ای از ساختارهای مشبک ان–ایزوگرید توسط واسیلیف و موروزوف در نشریات علمی منتشر شده‌اند [1]. همچنین تجزیه و تحلیل های مختلف پوسته‌های مشبک بر اساس مدل های پیوسته توسط توتارو و گوردال [2] ، بوراگواین و ولموروگان [3]، پاسچرو و هایر [4]، توتارو [5]، ژنگ و همکارانش گزارش شده است [6]. همچنین در مقالاتی توسط Hou و گرامول [7]، ژانگ و همکاران [8]، فرولونی و همکاران [9]، فن و همکاران [10] و موروزوف و همکاران [11]، نتایج حاصل از تجزیه و تحلیل پوسته‌های استوانه‌ای مشبک کامپوزیت را به روش اجزای محدود منتشر شده است. یوشیماسا و همکارانش تحلیل انتشار موج ارتعاشی با استفاده از تئوری ساختار تناوبی دو بعدی و روش اجزای محدود را برای ارزیابی عددی خواص فیلتر موج با محاسبات کمتر معرفی کردند. نتایج به‌دست‌آمده و پاسخ‌های شبیه‌سازی اجزای محدود مقایسه گردید. ایشان خواص هندسی ساختار شبکه با خواص مختلف فیلتر موج را با رویکردی برای طراحی سازه مشبک مرکب با خواص فیلتر موج گسترده تر و مطلوب و ترکیب چندین نوع ساختار مشبک ارائه دادند [12]. میکائیلی و همکارانش به مطالعه و بررسی ارتعاشات آزاد ورق های مشبک هدفمند در محیط‌های حرارتی بکار گرفته شده، پرداختند. معادلات تعادل حاکم، بر اساس نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول که شامل مؤلفه های جابجایی و دورانی می باشد، به دست آمده و با فرض شرایط مرزی چهار طرف گیردار به روش انرژی حل شده است. با حل مسأله مقدار ویژه، رفتار ارتعاشی سازه در محیط حرارتی (با حضور تنش حرارتی) تعیین شده است. نتایج تحلیلی و عددی با نتایج آثار گذشته مورد مقایسه و صحت سنجی قرار گرفته است [13]. لی و همکارانش به بررسی رفتارهای ارتعاش آزاد ایزوگرید با تقویت کننده

پرداخته‌اند. ایشان با تعیین خواص مواد، مزایای HISC نسبت به سیلندر تقویت شده ایزوگرید (ISC) مورد بحث قرار گرفت و می تواند به عنوان مرجعی برای طراحی بهینه فوق سبک و محکم عمل کند [14]. بانی جمالی و همکارانش رفتار ارتعاش آزاد یک پوسته مشبک مخروطی مدرج تابعی دوار و تقویت شده را بررسی کردند. ایشان معادلات حاکم بر اساس نظریه کلاسیک پوسته استخراج کرده با در نظر گرفتن اثرات شتاب گریز از مرکز و کوریولیس و همچنین کشش اولیه محیطی به دلیل چرخش پوسته در نظر گرفته اند. مسئله با روش گالرکین برای مرزهای مختلف حل گردیده و فرکانس‌های به دست آمده با فرکانس‌های موجود در سایر منابع مقایسه شده است. در ضمن نتایج نرم-افزاری اجزای محدود برای نشان دادن تأثیر پارامترهای مختلف مانند هندسی پوسته و خواص مواد، تقویت کننده‌ها، سرعت چرخش، و شرایط مرزی مورد بحث قرار گرفته است [15].

در این مقاله معادلات حاکم بر دینامیک و ارتعاشـــات آزاد یک ســازه کامپوزیتی مشــبک با شــرایط مرزی مختلف با روش گالرکین بصورت تحلیلی بدست آمده و سپس نتایج حاصل از روش تحلیلی با نتایج حاصـــل از روش اجزای محدود مقایســـه گردیده‌اند. انتخاب المان تیر که دارای خواص لازم برای محاسبه وتحلیل‌های مختلف ارتعاشی می‌باشد، از موارد مهم در رسیدن به نتایج دقیق و درصد خطای کمتر است.

معادلات حاکم

ســازه‌های اســتوانه‌ای غیر ایزوگرید توســط شــش متغیر طراحی معرفی می شوند. قطر D و طول L و پارامترهای هندسی سازهٔ مشبک کامپوزیتی شامل ضخامت پوسته (ارتفاع دنده مایل در قطع برش عرضــی) h، زاویه دنده‌های مایل نســبت به طول φ، ضخامت ریب‌های عمودی و مایل در مقطع عرضی δ_c و δ_h و فاصـــله های ریب های عمودی و مایل a_c و a_h نمایش داده می‌شــود. شــکل‌های (۱-الف و ب) مختصــات و پارامترهای هندسی سازه مشبک را نمایش می‌دهند. برای استخراج معادلات حاکم بر فرکانس‌های طبیعی پوســته اســتوانه‌ای مشــبک، از یک نظریه و مدل سازی کلاسیک بر پایه الاستیک در جهت شعاعی استفاده شده است. در مقاله حاضر معادلات حاکم بر پوسته سازه مشبک استخراج گردیده و سپس معادلات بستر وینکلر-پاســترناک به آنها اضــافه می‌گردد که معادلات حاکم جدیدی را تشکیل داده و نهایتا حل می‌گردد. به منظور بررسی دقیق مدل و بدست آوردن معادلات حرکت پوسته استوانه‌ای مشبک، هر یک بطور جداگانه بحث شده است.

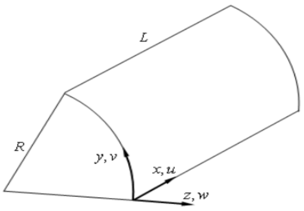
معادلات بستر. ساختار استوانه‌ای مشبک کامپوزیت بدین ترتیب در نظر گرفته شده است که از طرف شعاع خارجی، توسط یک بستر خطی، همگن و الاستیک در جهت محوری احاطه شده است. بستر وینکلر-پاسترناک را می‌توان به عنوان فنرهای لایه شعاعی و برشی با دو ضریب سختی K و G در محورهای طولی فرض کرد. فرض بر این است که فنرها دارای جابجایی خالص هستند، آنها کاملاً مستقل بوده و هیچ اثر تلفیقی و جفتی با یکدیگر ندارند. پاسخ ساده و معمول بستر به بارگذاری *P(x,y)* را می‌توان به این صورت نوشت:

$$p(x,y) = Kw - G\nabla^2 w \qquad (۱)$$

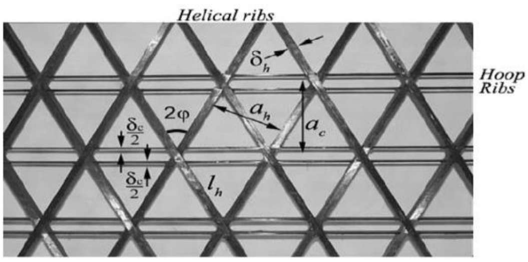
که در آن w جابجایی در امتداد y است و ∇^2 عملگر لاپلاس است.

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2} \qquad (۲)$$

شکل (۱) محورهای مختصات، α، β و γ پوسته استوانه‌ای، با شعاع R و طول L را نشان می‌دهد.



شکل ۱-الف مختصات و تغییر شکل در جهات طولی، محیطی و شعاعی [1]



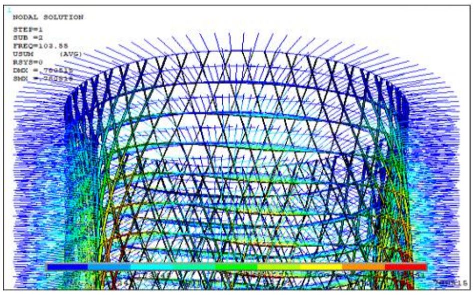
شکل ۱-ب نمایش پارامترهای هندسی سازه مشبک [1]

معادله حاکم بر پوسته مشبک استوانه‌ای. معادله حرکت با استفاده از نظریه کلاسیک پوسته‌های استوانه‌ای ارتوتروپیک ا ستخراج شده ا ست. برای ا ستفاده از مدل پیو سته پو سته، از تعداد دنده مارپیچ و حلقوی برای ساختار مشبک استفاده می‌شود. ساختار استوانه‌ای کامپوزیت مشبک با پوسته ارتوتروپیک پیوسته با سختی موثر معادل جایگزین می‌گردد. معادله حرکت در مختصات استوانه‌ای به شرح زیر است:

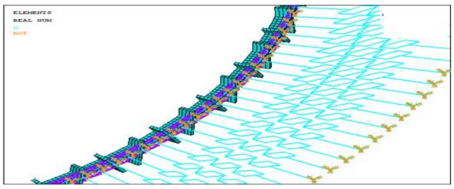
$$\frac{\partial N_\alpha}{\partial \alpha}+\frac{\partial N_{\alpha\beta}}{\partial \beta}-\beta_\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$$
$$\frac{\partial N_{\alpha\beta}}{\partial \alpha}+\frac{\partial N_\beta}{\partial \beta}+\frac{1}{R}\frac{M_{\alpha\beta}}{\partial \beta}+\frac{1}{R}\frac{M_\beta}{\partial \beta}-\beta_\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=0 \qquad (۳)$$
$$\frac{\partial^2 M_\alpha}{\partial \alpha^2}+\frac{2\partial^2 M_{\alpha\beta}}{\partial \alpha\partial \beta}+\frac{\partial^2 M_\beta}{\partial \beta^2}-\frac{N_\beta}{R}-\beta_\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0$$

که در آن β_ρ جرم واحد سطح می‌باشد. همچنین $N_\alpha, N_\beta, N_{\alpha\beta}$ و$M_\alpha, M_\beta, M_{\alpha\beta}$ به ترتیب مولفه های تنش ناشی از خمش و پیچش می‌باشند. تغییر مکان‌های u، v و w به ترتیب در طول محورهای α، β و γ است. عبارت بستر وینکلر-پاسترناک را می‌توان به سومین عبارت معادله (۳) اضافه نمود بطوریکه عبارت (٤) بدست آید. شکل‌های (۲ و ۳) نشان دهنده فنرها در جهت شعاعی بعنوان محیط الاستیک می‌باشند که توسط سطح بیرونی سازه پوسته محدود می‌شوند.

$$\frac{\partial N_\alpha}{\partial \alpha}+\frac{\partial N_{\alpha\beta}}{\partial \beta}-B_\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$$
$$\frac{\partial N_{\alpha\beta}}{\partial \alpha}+\frac{\partial N_\beta}{\partial \beta}+\frac{1}{R}\frac{M_{\alpha\beta}}{\partial \beta}+\frac{1}{R}\frac{M_\beta}{\partial \beta}-B_\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=0 \qquad (٤)$$
$$\frac{\partial^2 M_\alpha}{\partial \alpha^2}+\frac{\partial^2 M_{\alpha\beta}}{\partial \alpha\partial \beta}+\frac{\partial^2 M_\beta}{\partial \beta^2}-\frac{N_\beta}{R}-B_\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=Kw-G\nabla^2 w$$



شکل ۲ پوسته مشبک با محیط الاستیک در اطراف آن



شکل ۳ بستر الاستیک که توسط فنرهای شعاعی مدل‌سازی گردیده است

عبارات معادله (٤) باید با ایجاد معادلات ارتوتروپیک و شبه ارتوتروپیک که از مواد مرکب کامپوزیتی بدست می‌آیند، بصورت زیر قابل بیان خواهند بود:

$$\begin{bmatrix} N_\alpha \\ N_\beta \\ N_{\alpha\beta} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{21} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \varepsilon_\alpha \\ \varepsilon_\beta \\ \varepsilon_{\alpha\beta} \end{bmatrix} \qquad (۵)$$
$$\begin{bmatrix} M_\alpha \\ M_\beta \\ M_{\alpha\beta} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{21} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \kappa_\alpha \\ \kappa_\beta \\ \kappa_{\alpha\beta} \end{bmatrix}$$

بطوریکه B_{11}، B_{12}، B_{22} و B_{33} $(B_{12}=B_{21})$ و D_{11}، D_{12}، D_{22}، D_{22}، D_{33} $(D_{12}=D_{21})$ کرنش‌های غشایی سطح میانی؛ κ_α، κ_β و $\kappa_{\alpha\beta}$ تغییر مکان انحنای سطح میانی و ε_α، ε_β و $\varepsilon_{\alpha\beta}$ روابط تغییر مکان می‌باشند.

$$\varepsilon_{\alpha\beta}=\frac{\partial u}{\partial \beta}+\frac{\partial v}{\partial \alpha}\ \ \varepsilon_\beta=\frac{\partial u}{\partial \beta}+\frac{W}{R}\ \ \varepsilon_\alpha=\frac{\partial u}{\partial \alpha} \qquad (٦)$$
$$\kappa_\alpha=-\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2},\quad \kappa_\beta=-\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2}+\frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial \beta},\quad \kappa_{\alpha\beta}=-2\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha\partial \beta}+\frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial \alpha}$$

چهار شرط مرزی مورد نیاز بصورت زیر در نظر گرفته می-شود:

$$u=0,\ v=0,\ \omega=0,\ \frac{\partial w}{\partial \alpha}=0$$

با جایگذاری روابط (۵ و ٦) در رابطه (٤)، معادله حاکم کلی حرکت که شامل خواص بستر وینکلر-پاسترناک نیز می‌باشد، در سومین عبارت از معادله (٦) بدست می‌آید.

$$-\frac{B_{12}}{R}\frac{\partial u}{\partial \alpha}-\frac{B_{22}}{R}\frac{\partial v}{\partial \beta}+\frac{D_{22}}{R}\frac{\partial^3 \upsilon}{\partial \beta^3}+\frac{D_{12}+2D_{33}}{R}\frac{\partial^3 \upsilon}{\partial \alpha^2\partial \beta} \qquad (۷)$$
$$-\frac{B_{22}}{R^2}w-D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial \alpha^4}-2\left(D_{12}+2D_{33}\right)\frac{\partial^4 w}{\partial \alpha^2\partial \beta^2}$$
$$-D_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial \beta^4}-Kw+G\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2}+\frac{G}{R^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2}+B_\rho\omega^2 w=0$$

جهت حل تحلیلی معادله (۷)، تغییر مکان‌های u، v و w بصورت زیر در نظر گرفته می‌شوند:

$$\begin{cases} u(\alpha,\beta,t)=u(\alpha,\beta)\cos\omega t \\ v(\alpha,\beta,t)=v(\alpha,\beta)\cos\omega t \\ w(\alpha,\beta,t)=w(\alpha,\beta)\cos\omega t \end{cases} \tag{۸}$$

با جایگذاری معادله (۸) در معادله (۷) می‌توان رابطه (۹) را داشت:

$$\begin{aligned} &-\frac{B_{12}}{R}\frac{\partial u}{\partial \alpha}-\frac{B_{22}}{R}\frac{\partial v}{\partial \beta}+\frac{D_{22}}{R}\frac{\partial^3 v}{\partial \beta^3}+ \\ &\frac{D_{12}+2D_{33}}{R}\frac{\partial^3 v}{\partial \alpha^2\partial \beta}-\frac{B_{22}}{R^2}w-D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial \alpha^4} \\ &-2(D_{12}+2D_{33})\frac{\partial^4 \omega}{\partial \alpha^2\partial \beta^2}-D_{22}\frac{\partial^4 \omega}{\partial \beta^4}+ \\ &+B_\rho\omega_n^2 w-Kw+G\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}(\omega\cos\omega t)+\frac{G}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial \beta^2}(\omega\cos\omega t)=0 \end{aligned} \tag{۹}$$

با حل معادله بدست آمده با شرایط مرزی ذکر شده، فرکانس طبیعی برای پوسته استوانه‌ای مشبک قرار گرفته بر روی بستر الاستیک وینکلر-پاسترناک بدست می‌آید. حال می‌توان با استفاده از سریهای مثلثاتی برای یافتن پاسخ تغییر مکان در طول محیط استوانه که بصورت متناوب تکرار می‌گردد، استفاده نمود.

$$\begin{aligned} u(\alpha,\beta)&=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(\alpha)\cos\lambda_n\beta \\ w(\alpha,\beta)&=\sum_{n=1}^{\infty}w_n(\alpha)\cos\lambda_n\beta \\ v(\alpha,\beta)&=\sum_{n=1}^{\infty}v_n(\alpha)\sin\lambda_n\beta \end{aligned} \tag{۱۰}$$

با جایگذاری معادله (۱۰) در معادله (۹) می‌توان به یک معادله دیفرانسیل ساده و همگن رسید.

$$\begin{aligned} &\frac{B_{12}}{R}\frac{\partial u_n}{\partial \alpha}-\frac{\lambda_n}{R}(B_{22}+D_{22}\lambda_n^2)\upsilon_n+ \\ &\frac{D_{12}+2D_{33}}{R}\lambda_n\frac{d^2 v_n}{d\alpha^2}-\left(\frac{B_{22}}{R^2}+D_{22}\lambda_n^4\right)w_n \\ &-D_{11}\frac{\partial^4 w_n}{\partial \alpha^4}+2(D_{12}+2D_{33})\lambda_n^2\frac{\partial^2 w_n}{\partial \alpha^2}-Kw+G\frac{\partial^2 w_n}{\partial \alpha^2} \\ &-\frac{1}{R^2}G\,w_n\lambda_n^2+B_\rho\omega_n^2 w_n=0 \end{aligned} \tag{۱۱}$$

بطوریکه ω_n فرکانس طبیعی nام می‌باشد. لذا شرایط مرزی جدید مطابق با معادله (۱۱) بصورت زیر بیان می‌شود.

$$u_n=0,\ v_n=0,\ w_n=0,\ \frac{dw_n}{d\alpha}=0 \tag{۱۲}$$

روش گالرکین جهت حل یک مسئله مقدارمرزی مانند معادله (۱۱) همگن استفاده می شود. لذا تابعی تقریبی و مناسب برای پیدا کردن پاسخی سریع برای ارضاء شرایط مرزی گیردار- گیردار برای پیدا کردن مودهای ارتعا شی پایه پو سته ا ستوانه‌ای شکل مطرح شده در معادله (۱۲)، استفاده می‌گردد. تابع تقریبی بصورت زیر در فرض می‌گردد:

$$u_n=U_n\frac{dX}{d\alpha},\quad v_n=V_nX,\quad w_n=W_nX \tag{۱۳}$$

بطوریکه: $X=\cosh\frac{\lambda\alpha}{L}-\cos\frac{\lambda\alpha}{L}-\sigma\left(\sinh\frac{\lambda\alpha}{L}-\sin\frac{\lambda\alpha}{L}\right)$

در رابطه بالا λ و σ مقادیر ثابت هستند. با توجه به روش گالرکین رابطه میزان خطا بصورت زیر داده می‌شود:

$$\begin{aligned} Z_\alpha=&\left(B_{11}\frac{d^3X}{d\alpha^3}-B_{33}\lambda_n^2\frac{dX}{d\alpha}\right)U_n+(B_{12}+B_{33})\lambda_nV_n\frac{dX}{d\alpha}+ \\ &\frac{B_{12}}{R}\frac{dX}{d\alpha}W_n+B\rho\omega_n^2\frac{dX}{d\alpha}U_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_B=&-(B_{12}+B_{33})\lambda_nU_n\frac{d^2X}{d\alpha^2}+ \\ &\left[\left(B_{33}+\frac{D_{33}}{R^2}\right)\frac{d^2X}{d\alpha^2}-\left(B_{22}+\frac{D_{22}}{R^2}\right)\lambda_n^2X\right]V_n \\ &+\lambda_n\left(\frac{D_{12}+2D_{33}}{R}\frac{d^2X}{d\alpha^2}-\frac{B_{22}+D_{22}\lambda_n^2}{R}X\right)W_n+B_\rho\omega_n^2XV_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_\gamma=&\frac{-B_{12}}{R}\left[\frac{d}{d\alpha}U_n\frac{dX}{d\alpha}\right]-\frac{\lambda_n}{R}(B_{22}+D_{22}\lambda_n^2)V_nX+ \\ &\frac{D_{12}+2D_{33}}{R}\lambda_n\frac{d^2}{d\alpha^2}[V_nX]-\left(\frac{B_{22}}{R^2}+D_{22}\lambda_n^4\right)W_nX \\ &-D_{11}\frac{d^4}{d\alpha^4}(W_nX)+2(D_{12}+2D_{33})\lambda_n^2\frac{d^2}{d\alpha^2}(W_nX)+ \\ &B_\rho\omega_n^2W_nX-KW_nX+G\frac{d^2}{d\alpha^2}(W_nX)-\frac{1}{R^2}G\lambda_n^2W_nX \end{aligned} \tag{۱٤}$$

محاسبه مقادیر نامعلوم U_n، V_n و W_n از طریق معادله (۱٤) امکان‌پذیر خواهد بود و بدین ترتیب تابع تقریبی X و $\frac{dX}{d\alpha}$ بدست می‌آید. با روش گالرکین عبارات زیر بدست می‌آید:

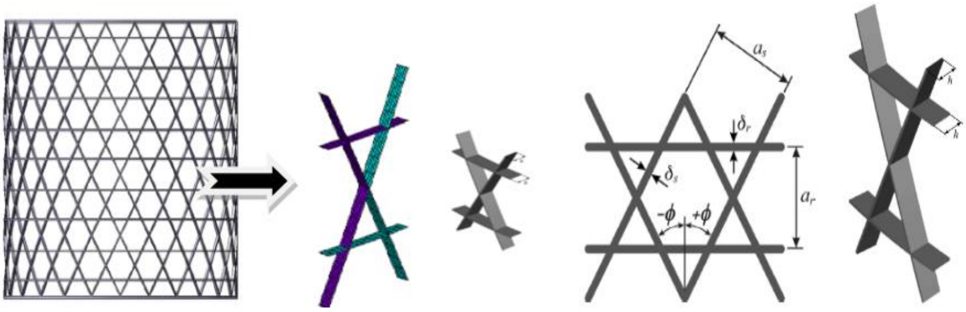
$$\int_0^L z_\alpha\frac{dX}{d\alpha}d\alpha=0\quad \int_0^L z_\beta X d\alpha=0\quad \int_0^L z_\gamma X d\alpha=0 \tag{۱۵}$$

با جایگذاری معادله (۱٤ در ۱۵) و فرض $\xi=\sigma\lambda\left(\sigma\lambda-2\right)$ رابطه (۱۱) بعد از برخی ساده‌سازی‌ها بصورت زیر مطرح می‌گردد.

$$-B_{12}\bar{U}_n\xi+n\left[\left(B_{22}+\frac{D_{22}}{R^2}n^2\right)s+\left(\frac{D_{12}+2D_{33}}{R^2}\frac{\xi}{s}\right)\right]V_n+\left[\begin{array}{l}\left(B_{22}+D_{22}\frac{n^4}{R^2}+\frac{D_{11}}{R^2}\frac{\lambda^4}{s^4}\right)+\\ 2\left(\frac{D_{12}+2D_{33}}{R^2}\right)n^2\frac{\xi}{s}+\\ G\frac{\xi}{s}+\left(K+G\frac{n^2}{R^4}\right)sR^2\end{array}\right]W_n-\omega_n^2B_\rho RLW_n=0 \quad (۱٦)$$

بطوریکه $\bar{U}_n=\frac{U_n}{L}$ و $s=\frac{L}{R}$.

پارامترهای معادله (۱٦) از مدل پیوسته پوسته مشبک استوانه‌ای در ضمیمه (A_1) آورده شده است. پوسته مشبک استوانه‌ای شامل دنده‌های محیطی و مورب است که از میان یکدیگر مطابق شکل (٤) عبور می‌کنند. همچنین پارامترهای این سازه در جدول (۱) داده شده است.



شکل ٤ سازه مشبک استوانه‌ای شامل دنده‌های محیطی و مورب

جدول ۱ مقادیر و پارامترهای سازه مشبک

پارامترها	تعاریف	مقادیر
ρ	چگالی (کیلوگرم بر متر مکعب)	۱۵۵۰
E	ضریب الاستیک (نیوتن بر متر مربع)	۷۰×۱۰^{۹}
R	شعاع سطح مقطع مشبک (متر)	۰/۵
L	طول موثر استوانه مشبک (متر)	۲
δ_s	ضخامت دنده‌های مایل (میلی‌متر)	۲
δ_r	ضخامت دنده‌های محیطی (میلی‌متر)	۲
ρ_s	چگالی دنده‌های مایل (کیلوگرم بر متر مکعب)	۱۵۵۰
ρ_r	چگالی دنده‌های محیطی (کیلوگرم بر متر مکعب)	۱۵۵۰
H	ارتفاع دنده‌ها (میلی‌متر)	۸
L/R	نسبت طول به شعاع	٤
R/H	نسبت شعاع به ارتفاع دنده‌ها	٦۲/۵
υ	ضریب پوآسون	۰/۳۲
Φ	زاویه بین دنده‌های مایل	۱۵^{0}
n_s	تعداد دنده‌های مایل	٤۸
K	ضرایب پاسترناک	۰و۱۰و ۱۰۰و ۱۰۰۰و $۱۰^{٤}$ و$۱۰^{۵}$
G	ضرایب وینکلر	۵۰۰، ۱۰۰، ۷۵، ۵۰، ۲۵، ۱۰، ۰

با استفاده از پارامترهایی که در ضمیمه A_1 و A_2 آورده شده ا ست و با جایگذاری در معادله (١٦) و تق سیم نتیجه بر عبارت $E_s\sigma_s n_s \frac{h}{R}$، رابطه زیر بدست می‌آید:

$$
\begin{aligned}
&-\frac{E}{s}\frac{\sigma_s}{R}n_s f_{12} h\overline{U}_n\xi + \\
&n\left[\begin{array}{l}\left(E_s\frac{\sigma_s}{R}n_s f_{12}h+\frac{h^3}{12}E_s\frac{\sigma_s}{R}n_s f_{12}\right)s+\\ \frac{1}{R^2}\left(\frac{h^2}{12}E_s\frac{\sigma_s}{R}n+f_{12}+\frac{2h^3}{12}E_s\frac{\sigma_s}{R}n_s f_{12}\right)n^2\frac{\xi}{s}\end{array}\right]V_n+ \\
&\left[\begin{array}{l}nt_s\frac{\sigma_s}{R}n_s f_{22}+\frac{h^3}{12}E_s\frac{\sigma_s}{R}n_s f_{22}\frac{n^4}{R^2}+\\ \frac{h^3}{12R^2}\frac{\lambda^4}{s^4}n_s f_n+\\ \frac{2}{R^2}\left(\frac{h^3}{R}E_s\frac{\sigma_s}{R}n_s f_{12}+2\frac{h^3}{12}E_s\right)+\\ \frac{1}{R^2}G\frac{\xi}{s}+\left(K+\frac{1}{R^2}G\frac{n^2}{R^2}\right)sR^2\end{array}\right]W_n \\
&-\omega_n^2 h\delta\frac{\sigma_s}{R}n_s\rho_p RLW_n=0
\end{aligned}
\tag{۱۷}
$$

پارامتر بی بعد فرکانس بصورت زیر بیان می‌گردد:

$$\eta_n=\omega_n^2\frac{\rho_s}{E_s}Rl \tag{۱۸}$$

با صرفنظر از تغییر مکان در جهت α در مقایسه با تغییر مکان در راستای محیطی می‌توان معادله فشرده زیر را مطرح نمود:

$$\begin{cases}(c_{11}-\eta_n g_{11})V_n+c_{12}W_n=0\\ c_{21}V_n+(c_{22}-\eta_n g_{22}+p_{ss})W_n=0\end{cases} \tag{۱۹}$$

پارامترهای معادله (۱۹) در ضمیمه A3 آورده شده است. با قرار دادن دترمینان ضـــرایب برابر با صـــفر رابطه (۲۰) بدســـت می‌آید.

$$\det\begin{vmatrix}c_{11}-\eta_n g_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}-\eta_n G_{22}+P_{ss}\end{vmatrix}=0\Rightarrow\quad a\eta_n^2-b\eta_n+c=0 \tag{۲۰}$$

ریشه معادله خواهد بود:

$$\eta_n=\frac{b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \tag{۲۱}$$

که با در نظر گرفتن عبارت منفی و فرض زیر می‌توان رابطه نهایی را بدست آورد.

$$a=g_{11}q_{22},\ b=c_{11}g_{22}+c_{22}g_{11}+P_{ss}g_{11} \tag{۲۲}$$
$$c=c_{11}c_{22}-c_{12}^2+c_{11}P_{ss}$$

مقادیر فرکانس ω_n بصورت زیر ارائه می‌گردد:

$$\omega_n=\xi_n\sqrt{\frac{E_s}{\rho_s Rl}} \tag{۲۳}$$

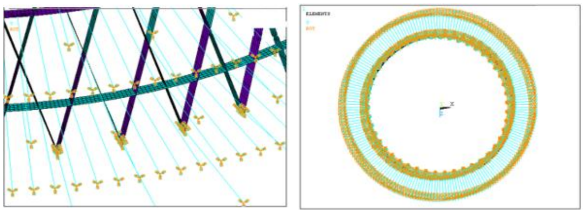
فرمول بد ست آمده یک رابطه م ستقیم برای بد ست آوردن فرکانس طبیعی یک پوســته مشــبک اســتوانه‌ای با در نظر گرفتن بستر الاستیک وینکلر-پاسترناک می‌باشد که می‌تواند در طراحی سازه‌های مشبک جهت کاهش زمان محاسبه استفاده گردد.

نتایج عددی و صحت سنجی

در مدل‌سازی روش اجزای محدود، یک ترکیب المان سه بعدی برای سازه مشبک و لایه برشی برای پارامتر وینکلر (در جهت شعاع سطح مقطع استوانه) در نظر گرفته می‌شود. المان دارای قابلیت‌های سه بعدی و جابجایی خالص و بدون کوپلینگ می‌باشد. فرض می‌گردد که المان بدون چرخش باشد. همچنین المان فنر بدون جرم در جهت شعاعی فرض می‌گردد. در اولین قدم جهت مدل‌سازی یک سازه مشبک، کوچکترین سلول یک سازه مشبک ایجاد می‌گردد و با تکرار آن در طول محورها مدل کامل به‌دست می‌آید. برای این امر ابتدا یک بال از دنده‌های مایل وعمودی به همراه ضخامت H و شعاع R در دستگاه مختصات کارتزین با ۱۰ نقطه تعریف می‌شود. با انتخاب خط به مرز بندی نواحی پرداخته و امکان ایجاد سطح مقطع نیمی از یک دنده مایل یا عمودی انجام می‌پذیرد. سپس با قرینه‌سازی شکل بدست آمده نسبت به محور قائم سمت دیگر دنده‌ها ایجاد و به همین ترتیب مش‌بندی می‌گردد. در مرحله بعد اولین حلقه از سازه مشبک ایجاد می‌گردد. پس از اتمام مدل‌سازی شرایط مرزی لازم تمام درجات آزادی گره‌های ابتدایی و انتهایی بسته می‌شود. تمامی نقاط با هم مرج شده و تلورانس مدل‌سازی جهت بدست آوردن یک مدل واحد در نظر گرفته می‌شود برای بستر می‌توان از یک سری فنرهایی که در طول شعاع پوسته استوانه‌ای در قسمت خارجی به صورتی المان فنر به عنوان پارامترهای وینکلر و پاسترناک در نظرگرفت. جهت مدل‌سازی از المان shell-181 با چهار گره استفاده شده است. از این جهت مدل‌سازی سازه با

ضخامت متوسط استفاده می‌گردد. از چهار گره که هر کدام دارای ۶ درجه آزادی هستند، شامل سه جابجایی و سه درجه آزادی چرخشی است. برای بستر نیز از المان combine 14 استفاده گردیده است. شکل (۵) بستر مدل‌سازی شده با استفاده از المان‌های فنر که در یک انتها به سازه متصل و در انتهای دیگر بسته می‌باشند را، نمایش می‌دهد قبل از محاسبه فرکانس‌های طبیعی ساختار مشبک بر روی بستر الاستیک ، محاسبه تحلیلی برای اعتبار سنجی معادله، از طریق مقایسه فرکانس‌های طبیعی پوسته مشبک، بدون بستر الاستیک با مطالعات قبلی انجام شده و سپس با افزودن بستر الاستیک، فرمول تحلیلی جدیدی بدست آمده است. در مدل‌سازی با روش اجزای، تعداد المان‌های موجود برای سازه مشبک با طول ۲ متر و تعداد حداقل دنده‌های $n_s=48$ به همراه فنرها جهت مدل‌سازی بستر پاسترناک، ۲۸۴۰۳ می‌باشد.

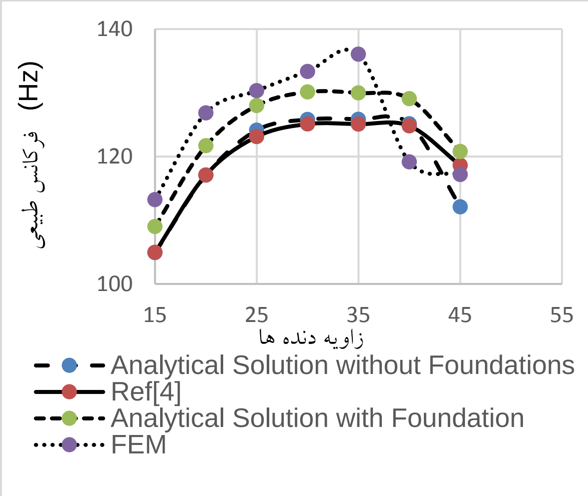
نتایج نشان داد که با افزودن بستر الاستیک، ضرایب مدول وینکلر و پاسترناک تأثیر فوق العاده‌ای در افزایش فرکانس‌های طبیعی ساختار مشبک دارند. همانطور که در نتایج جدول (۲) نشان داده شده است، با افزایش تعداد دنده های مارپیچ به طور خاص بیش از ۴۸، و با داشتن بستر الاستیک، فرکانس‌های طبیعی افزایش می یابد. نتایج در جدول (۲)، با استخراج معادلات حاکم با شرایط مرزی، با استفاده از روش گالرکین، با و بدون بستر الاستیک بدست آمده و با نتایج روش اجزای محدود مطابقت خوبی دارد. همچنین شکل (۶) نشان می‌دهد که نتایج حاصل از راه حل‌های تحلیلی با نتایج مرجع [4] برای سازه مشبک بدون بستر الاستیک مطابقت خوبی دارد. همچنین نشان می‌دهد که نتایج حاصل از راه حل‌های تحلیلی با در نظر گرفتن بستر الاستیک مطابقت خوبی با نتایج حاصل از روش اجزای محدود دارند.



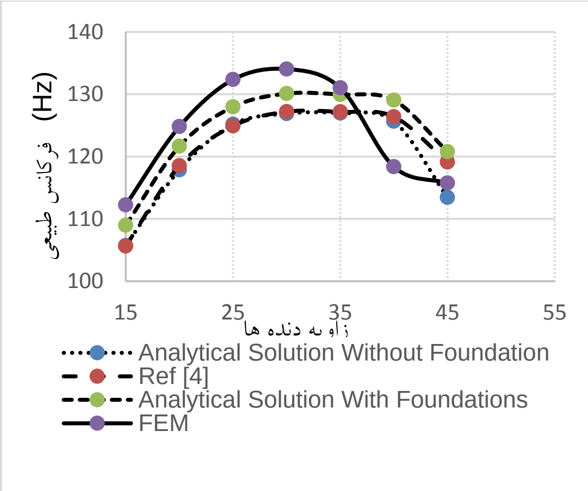
شکل ۵ مدل استوانه مشبک با بستر الاستیک

جدول ۲ فرکانس‌های طبیعی بدست آمده از روش تحلیلی با و بدون در نظر گرفتن بستر الاستیک برای طول ۲ متر

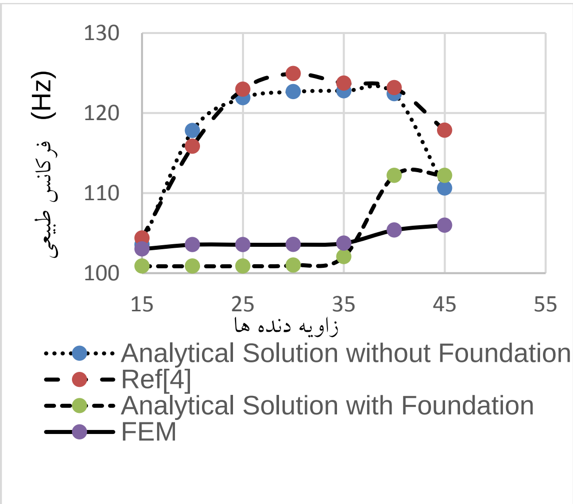
محاسبه فرکانس طبیعی بدون در نظر گرفتن بستر وینکلر-پاسترناک						
ns	۴۸		۶۰		۷۲	
زاویه دنده	تحلیلی	مرجع [4]	تحلیلی	مرجع [4]	تحلیلی	مرجع [4]
۱۵	۱۰۳/۵۵	۱۰۴/۳۷	۱۰۴/۹	۱۰۴/۹۶	۱۰۵/۷۰	۱۰۵/۶۴
۲۰	۱۱۷/۷۹	۱۱۵/۸۳	۱۱۷/۰۷	۱۱۷/۱۰	۱۱۷/۸۶	۱۱۸/۵۲
۲۵	۱۲۱/۸۹	۱۲۲/۹۶	۱۲۴/۱۲	۱۲۳/۱۱	۱۲۵/۱۷	۱۲۴/۹۱
۳۰	۱۲۲/۶۵	۱۲۴/۹۲	۱۲۵/۸۱	۱۲۵/۰۹	۱۲۶/۹۰	۱۲۷/۱۹
۳۵	۱۲۲/۷۶	۱۲۳/۷۳	۱۲۵/۸۲	۱۲۵/۰۸	۱۲۶/۹۷	۱۲۷/۱۷
۴۰	۱۲۲/۳۹	۱۲۳/۱۷	۱۲۵/۱۳	۱۲۴/۸۰	۱۲۵/۶۶	۱۲۶/۳۹
۴۵	۱۱۰/۶۱	۱۱۷/۸۳	۱۱۲/۱	۱۱۸/۶۲	۱۱۳/۴۳	۱۱۹/۱
محاسبه فرکانس طبیعی با در نظر گرفتن بستر وینکلر-پاسترناک						
ns	۴۸		۶۰		۷۲	
زاویه دنده	تحلیلی	FEM	تحلیلی	FEM	تحلیلی	FEM
۱۵	۱۰۰/۸۶	۱۰۰/۰۱	۱۰۹/۰۹	۱۳۳/۲۲	۱۰۸/۹۷	۱۱۲/۲۴
۲۰	۱۰۰/۸۶	۱۰۳/۵۵	۱۲۱/۶۸	۱۲۶/۸۳	۱۲۱/۶۵	۱۲۴/۸۰
۲۵	۱۰۰/۸۷	۱۰۳/۵۵	۱۲۷/۹۹	۱۳۰/۳۲	۱۲۷/۹۷	۱۳۲/۳۵
۳۰	۱۰۰/۹۸	۱۰۳/۵۶	۱۳۰/۱۲	۱۳۳/۳۵	۱۳۰/۱۰	۱۳۴/۰۴
۳۵	۱۰۲/۰۵	۱۰۳/۷۳	۱۲۹/۹۷	۱۳۶/۰۵	۱۲۹/۹۵	۱۳۱/۰۲
۴۰	۱۱۲/۱۹	۱۰۵/۳۷	۱۲۹/۰۶	۱۱۹/۱۶	۱۲۹/۰۴	۱۱۸/۳۶
۴۵	۱۱۲/۲۰	۱۰۵/۹۸	۱۲۰/۷۹	۱۱۷/۱۷	۱۲۰/۷۸	۱۱۵/۷۴



شکل ٦ مقایسه فرکانس‌های طبیعی سازه مشبک با و بدون در نظر گرفتن بستر الاستیک با تعداد دنده‌های ns=48



شکل ٧ مقایسه فرکانس‌های طبیعی سازه مشبک با و بدون در نظر گرفتن بستر الاستیک با تعداد دنده‌های ns=60



شکل ٨ مقایسه فرکانس‌های طبیعی سازه مشبک با و بدون در نظر گرفتن بستر الاستیک با تعداد دنده‌های ns=72

در شکل های (۸-۶) مقادیر فرکانس‌های طبیعی برای تعداد دنده و زاویه‌های مختلف نشان داده شده است. همچنین مشاهده می‌گردد که فرکانس‌های طبیعی بدون بستر الاستیک کاهش می‌یابند. برای مطالعه تأثیر ضرایب بستر، K و G، فرکانس‌های طبیعی

سازه، با استفاده از معادله جایگزین (۲۳) محاسبه گردیده است.

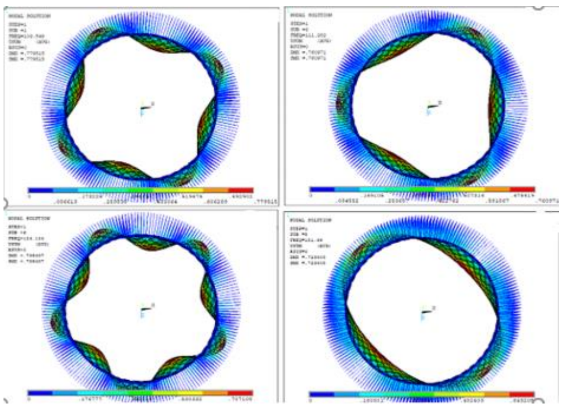
از آنجا که تجزیه و تحلیل مود با المان‌های بسیار زیادی برای طول ۴ متر و دنده های محیطی ۶۰ و ۷۲ زمان و محاسبات زیادی را می‌طلبد، بنابراین محاسبات برای استوانه بطول ۲ متر و زاویه دنده ۱۵ درجه انجام شده است. برای محاسبه فرکانس‌های طبیعی استوانه با طول و زاویه دیگر، با تعداد دنده های مختلف محیطی، به کامپیوترهای پیشرفته با پردازنده‌های موازی نیاز است. جدول (۳) تغییرات ضرایب وینکلر و پاسترناک و تأثیر آنها بر فرکانس-های طبیعی را نشان می دهد. سختی سازه تحت تأثیر دو ضریب است و هر یک از آنها نقش مهمی در تغییر فرکانس‌های طبیعی دارد.

جدول ۳ فرکانس‌های طبیعی محاسبه شده توسط فرمول‌های تحلیلی با تغییرات ضریب بستر الاستیک برای طول ۲ متر

فرکانس طبیعی (Hz)	(k,G)	فرکانس طبیعی (Hz)	(k,G)
۱۰۰/۸۶	(۰،۱۰)	۱۰۰/۹۲	(۱۰،۱۰)
۱۰۰/۸۶	(۰،۱۰۰)	۱۰۰/۹۳	(۱۰،۱۰۰)
۱۰۰/۸۹	(۰، ۲×۱۰^{۳})	۱۰۰/۹۵	(۱۰،۱۰۰۰)
۱۰۱/۱۰	(۰،۱۰^{۴})	۱۰۱/۱۷	(۱۰،۱۰^{۴})
۱۰۳/۳۰	(۰،۱۰^{۵})	۱۰۳/۳۷	(۱۰،۱۰^{۵})
۱۲۳/۱۷	(۰،۱۰^{۶})	۱۲۳/۲۲	(۱۰،۱۰^{۶})
۱۴۲/۰۱	(۰، ۲×۱۰^{۶})	۱۴۲/۰۶	(۲×۱۰^{۶}، ۰)
۱۵۸/۶۳	(۰، ۳×۱۰^{۶})	۱۵۸/۶۷	(۱۰، ۳×۱۰^{۶})
۱۰۱/۰۲	(۲۵،۱۰)	۱۰۱/۱۹	(۵۰،۱۰)
۱۰۱/۰۳	(۲۵،۱۰۰)	۱۰۱/۱۹	(۵۰،۱۰۰)
۱۰۱/۰۵	(۲۵،۱۰۰۰)	۱۰۱/۲۱	(۵۰،۱۰۰۰)
۱۰۱/۲۷	(۲۵،۱۰^{۴})	۱۰۱/۴۴	(۵۰،۱۰^{۴})
۱۰۳/۴۷	(۲۵،۱۰^{۵})	۱۰۳/۶۳	(۵۰،۱۰^{۵})
۱۲۳/۳۰	(۲۵،۱۰^{۶})	۱۲۳/۴۸	(۵۰،۱۰^{۶})
۱۴۲/۱۳	(۲۵، ۲×۱۰^{۶})	۱۴۲/۲۵	(۵۰، ۲×۱۰^{۶})
۱۵۸/۷۴	(۲۵، ۳×۱۰^{۶})	۱۵۸/۸۴	(۵۰، ۳×۱۰^{۶})
۱۰۱/۵۲	(۱۰۰،۱۰)	۱۰۱/۳۵	(۷۵،۱۰)
۱۰۱/۵۲	(۱۰۰،۱۰۰)	۱۰۱/۳۶	(۷۵،۱۰۰)
۱۰۱/۵۴	(۱۰۰،۱۰۰۰)	۱۰۱/۳۸	(۷۵،۱۰۰۰)
۱۰۱/۷۷	(۱۰۰،۱۰^{۴})	۱۰۱/۶۰	(۷۵،۱۰^{۴})
۱۰۳/۹۵	(۱۰۰،۱۰^{۵})	۱۰۳/۷۹	(۷۵،۱۰^{۵})
۱۲۳/۷۱	(۱۰۰،۱۰^{۶})	۱۲۳/۵۷	(۷۵،۱۰^{۶})
۱۴۲/۴۸	(۱۰۰، ۲×۱۰^{۶})	۱۴۲/۳۶	(۷۵، ۲×۱۰^{۶})
۱۵۹/۰۵	(۱۰۰، ۳×۱۰^{۶})	۱۵۸/۹۵	(۷۵، ۳×۱۰^{۶})
۱۰۷/۳۰	(۱۰۰۰،۱۰)	۱۰۱/۵۲	(۵۰۰،۱۰)
۱۰۷/۳۱	(۱۰۰۰،۱۰۰)	۱۰۱/۵۲	(۵۰۰،۱۰۰)
۱۰۷/۳۲	(۱۰۰۰،۱۰۰۰)	۱۰۱/۵۴	(۵۰۰،۱۰۰۰)
۱۰۷/۵۳	(۱۰۰۰،۱۰^{۴})	۱۰۱/۷۷	(۵۰۰،۱۰^{۴})
۱۰۹/۶۰	(۱۰۰۰،۱۰^{۵})	۱۰۳/۹۵	(۵۰۰،۱۰^{۵})
۱۲۸/۴۹	(۱۰۰۰،۱۰^{۶})	۱۲۳/۷۱	(۵۰۰،۱۰^{۶})
۱۴۶/۶۵	(۱۰۰۰، ۲×۱۰^{۶})	۱۴۲/۴۸	(۵۰۰، ۲×۱۰^{۶})
۱۶۲/۸۰	(۱۰۰۰، ۳×۱۰^{۶})	۱۵۹/۰۵	(۵۰۰، ۳×۱۰^{۶})

همانطور که در جدول (۳) ذکر شده است، افزایش K، برای بسترالاستیک در حالی که G را ثابت نگه داشته شود، (و بالعکس) فرکانس‌های طبیعی افزایش می‌یابد. برای مدل‌سازی به روش اجزای محدود برای پوسته استوانه‌ای مشبک از ۹۷۸۳۰ گره و ۳۹۸٤ المان فنر استفاده شده است. سختی کل المان فنرها از قوانین فنرهای موازی پیروی می‌کند و بر تعداد فنرهای تقسیم شده و در مدل‌سازی در نظر گرفته می‌شود.

ارتعاش اساسی و پایه برای پوسته مشبک استوانه‌ای که توسط بستر الاستیک با لبه‌های گیردار در نرم‌افزار اجزای محدود بدست آمده است. چهار شکل مود در شکل (۹) برای مقادیر $k = 100$ و $G = 0\ N/m^3$ نشان داده شده است. تغییرات ضریب وینکلر بستر الاستیک، K، از ۰ تا ۲×۱۰۶ و تأثیر آن بر فرکانس اساسی در جدول (٤) نشان داده شده است.

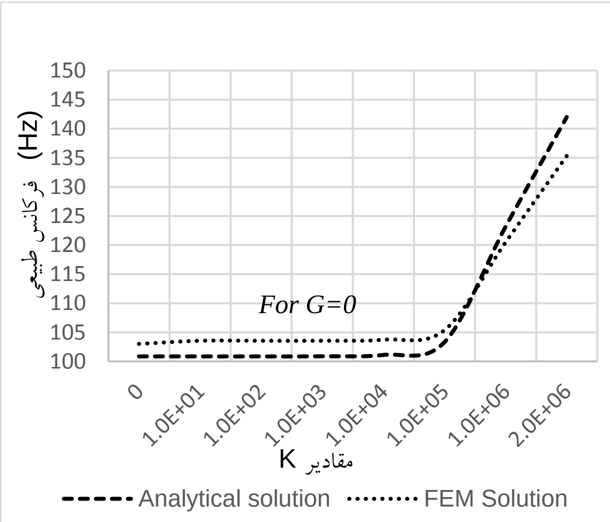


شکل ۹ شکل مودهای اول، سوم، پنجم و هفتم استوانه مشبک

جدول ٤ تغییرات فرکانس‌های طبیعی با در نظر گرفتن ضریب تغییرات بستر الاستیک برای n_s=48

درصد خطا ٪	فرکانس طبیعی به روش FEM	فرکانس طبیعی به روش تحلیلی	(K, G)
۲/۱۳	۱۰۳/۰۱	۱۰۰/۸٦	(۰،۰)
۲/٦۷	۱۰۳/٥٥	۱۰۰/۸٦	(۱۰۰،۰)
۲/٦۷	۱۰۳/٥٥	۱۰۰/۹۰	(۱۰۰۰،۰)
۲/٦٥	۱۰۳/٦٥	۱۰۰/۹٥	$(10^4,0)$
۲/٦	۱۰۳/۷۳	۱۰۱/۱۱	$(10^5,0)$
۲/۱	۱۰٥/۳۷	۱۰۱/۳۱	$(10^6,0)$
۲/۱۷	۱۲۰/٤۹	۱۲۳/۱۷	$(2\times10^6,0)$
٤/۷۰	۱۳٥/۳۳	۱٤۲/۰۱	$(3\times10^6,0)$

فرکانس‌های طبیعی حاصل از حل تحلیلی و روش اجزای محدود در جدول (٤) برای $n_s = 48$ دنده مقایسه شده و مقادیر خطا نیز محاسبه گردیده است. این محاسبات را می‌توان برای $n_s = 60$ و ۷۲ دنده به ازای زوایای دیگر تکرار کرد بطوریکه منجر به رسم نمودارهای زیادی می‌شود. روند افزایش فرکانس طبیعی پایه را می‌توان بین دو سری از نتایج را در یک جدول مقایسه کرد و به عنوان یک نمودار در شکل (۱۰) نشان داده شده است.



شکل ۱۰ روند افزایش فرکانس طبیعی پایه بین نتایج تحلیلی و اجزای محدود

فرکانس‌های طبیعی حاصل از حل تحلیلی و روش اجزای محدود در جدول (٤) برای $n_s = 48$ دنده مقایسه شده و مقادیر خطا نیز محاسبه گردیده است. این محاسبات را می‌توان برای $n_s = 60$ و ۷۲ دنده به ازای زوایای دیگر تکرار کرد بطوریکه منجر به رسم نمودارهای زیادی می‌شود. روند افزایش فرکانس طبیعی پایه را می‌توان بین دو سری از نتایج را در یک جدول مقایسه کرد و به عنوان یک نمودار در شکل (۱۰) نشان داده شده است.

نتیجه‌گیری

مسئله ارتعاشات آزاد پوسته استوانه‌ای مشبک کامپوزیتی که توسط بستر وینکلر-پاسترناک احاطه گردیده است با شرایط مرزی گیردار مطرح شده است. با فرض ویژگی‌های سختی ارتوتروپی موثر، مدل پیوسته با سازه مشبک جایگزین گردیده و

فرمول تحلیلی با استفاده از روش فوریه و روش گالرکین بدست آمده است. فرمول پیوسته برای فرکانس‌های طبیعی پوسته مشبک محصور در یک محیط الاستیک حل گردیده و نتایج با استفاده از روش اجزای محدود بررسی و مورد تأیید قرار گرفته است. برای شبیه سازی‌های روش اجزای محدود، ضرایب ویژگی‌های وینکلر و پاسترناک به ترتیب با فنرهای برشی و شعاعی جایگزین شده‌اند. فرکانس طبیعی پایه سیستم به ویژگی‌های بستر الاستیک بستگی داشته، بنابراین تغییر سختی فنرهای شعاعی و برشی باعث ایجاد تغییر در فرکانس‌های طبیعی می‌شود. مشاهده گردیده است که با افزایش سختی فنرها، می‌توان انتظار پایداری بیشتری در سیستم داشت. استفاده از هر دو روش تحلیلی و عددی، نشان می‌دهد که مقادیر بالاتر برای پارامترهای ساختاری سیستم برای سیستم با طول کوتاه‌تر مورد نیاز است. کارآیی فرمول تحلیلی با استفاده از محاسبات عددی (اجزای محدود) مورد بررسی و تأیید قرار گرفته است. فرمول پارامتری بدست آمده می‌تواند کارآمدی و مناسب بودن آنرا جهت بدست آوردن ارتعاشات آزاد سازه مشبک استوانه‌ای که توسط بستر وینکلر-پاسترناک که با فنرهای شعاعی و برشی معادل‌سازی گردیده‌اند را جهت تجزیه و تحلیل و همچنین طراحی امکان پذیر کند. طراح می‌تواند اثرات تغییر مواد، دانسیته، طول سازه، قطر سازه، زاویه بافت الیاف و همچنین تعداد دنده‌های مایل و عمودی را در بستر مورد نیاز در مأموریت‌های مختلف و کنترل فرکانس بدون صرف هزینه و وقت محسوسی محاسبه نماید. این عبارت یک بسته کامل جهت آغاز طراحی است بگونه‌ای محصول و بستر را به‌صورت یکپارچه و یکجا تحلیل می‌نماید. با افزایش سختی فنرهای برشی و شعاعی پایدار مطلوب را برای سازه‌های حساس هوافضایی ممکن می‌شود. افزایش طول در سازه سبب کاهش فرکانس طبیعی است. لذا با طراحی بستر مناسب پایداری کافی برای آن حاصل می‌گردد.

تقدیر و تشکر

نویسندگان این مقاله از استاد محترم جناب آقای دکتر جعفر اسکندری جم به جهت راهنمایی علمی و از فصلنامه علمی و پژوهشی علوم کاربردی و محاسباتی در مکانیک فردوسی مشهد کمال سپاس و تشکر را دارد.

واژه نامه

سازه مشبک	Lattice structure
روش فوریه	Fourier method
روش گالرکین	Galerkin method
پایه الاستیک	Elastic foundation
دنده حلقوی	Helical rib
دنده محیطی	Circumferential rib
محیط الاستیک	Elastic ambient
بستر وینکلر پاسترناک	Winkler Pasternak foundation
روش اجزای محدود	Finite Element Method

فهرست علائم

چگالی	ρ
ضریب الاستیک	E
شعاع سطح مقطع مشبک (میلی‌متر)	R
طول موثر استوانه مشبک (میلی‌متر)	L
ضخامت دنده‌های مایل (میلی‌متر)	δ_s
ضخامت دنده‌های محیطی (میلی‌متر)	δ_r
چگالی دنده‌های مایل(کیلوگرم بر متر مکعب)	ρ_s
چگالی دنده‌های محیطی(کیلوگرم بر متر مکعب)	ρ_r
ارتفاع دنده‌ها (میلی‌متر)	H
نسبت طول به شعاع	L/R
نسبت شعاع به ارتفاع دنده‌ها	R/H
ضریب پوآسون	υ
زاویه بین دنده‌های مایل	φ
تعداد دنده‌های مایل	n_s
فرکانس طبیعی (رادیان بر ثانیه)	ω_n
جرم واحد سطح (کیلوگرم بر متر مربع)	β_ρ

مراجع

1. Wang, T.M. and Stephens, J.E., “Natural Frequencies of Timoshenko Beams on Pasternak Foundations”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 51, No. 2, Pp. 149-155, (1977).

2. Khalifa Ahmed M., “Natural Frequencies and Mode Shapes of Variable Thickness Elastic Cylindrical Shells Resting on a Pasternak Foundation”, *Journal of Vibration and Control*, Vol. 17, No. 8, Pp. 1158–1172, (2016).
3. Paliwal, D.N. and Pandey, R., “Free Vibrations of An Orthotropic Thin Cylindrical Shell on a Pasternak Foundation”, *AIAA Journal*, Vol. 39, No. 11, (2001).
4. Lopatin, A.V., Morozov, E.V. and Shaatov, A.V., “An Analytical Expression for Fundamental Frequency of The Composite Lattice Cylindrical Shell with Clamped Edges”, *Journal of Composite Structures*, Vol. 141, No. 1, Pp. 232-239, (2016).
5. Lopatin, A.V., Morozov, E.V. and Shaatov, A.V., “Fundamental Frequency of a Cantilever Composite Filament-Wound Anisogrid Lattice Cylindrical Shell”, *Journal of Composite Structures*, Vol. 133, Pp. 564–575, (2015).
6. Vasiliev, V.V and Brayan, V.A., “Anisogrid Composite Lattice Structures-Development and Aerospace Applications”, *Journal of Composite Structures*, Vol. 94, No. 3, Pp.1117-1127, (2012).
7. Vasiliev, V.V., Brayan, V.A. and Rasin, A.F., “Anisogrid Lattice Structures-Survey of Development and Application”, *Journal of Composite Structures*, Vol. 54, No. 2–3, Pp. 361-370, (2001).
8. Hou, A. and Gramoll, K., “Compressive Strength of Composite Lattice Structures”, *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, Vol. 17, No. 5, (1998).
9. Totaro, G., “Local Buckling Modelling of Isogrid and Anisogrid Lattice Cylindrical Shells with Hexagonal Cells”, *Journal of Composite Structures*, Vol. 95, Pp. 403–410, (2013).
10. Xu, M. and Qiu, Z., “Free Vibration Analysis and Optimization of Composite Lattice Truss Cores and Sandwich Beams with Interval Parameters”, *Journal of Composite Structures*, Vol. 106, No.1, Pp. 85–95, (2013).
11. Frulloni, E., Conti, K. and Torre, L., “Experimental Study and Finite Element Analysis of The Elastic Instability of Composite Lattice Structures for Aeronautic Applications”, *Journal of Composite Structures*, Vol. 78, Pp. 519–528, (2007).
12. Iwata Y. , Yokozeki T., “ Shock wave filtering of two-dimensional CFRP X-lattice structures: A numerical investigation”, *Composite Structures*, Vol. 265, (2021).
13. Mikaeili, E, Heydarnabi, M., Eskandari Jam, J, “Analysis of free vibrations of smart FGM lattice plates in thermal environments”, *Journal of Mechanical Eng. University of Tabriz*, Vol. 92, No. 50, Issue 3, Autumn, (1399). (In persian)
14. Li, M., Fan, H., "Free vibration behaviors and vibration correlation technique of hierarchical Isogrid stiffened composite cylindricals”, *Thin-Walled Structures*, Vol. 159, (2020).
15. Banijamali, S. M. and Jafari, A., "Free vibration analysis of rotating functionally graded conical shells reinforced by lattice structure”, *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, (2021).

پیوست‌ها

$$A_{11} = 2E_S \frac{\delta_S}{a_s}\cos^4\phi,\quad A_{12} = A_{33} = 2E_S \frac{\sigma_S}{a_s}\cos^2\phi\sin^2\phi,$$
$$A_{22} = 2E_S \frac{\sigma_s}{a_s}\sin^4\phi + E_r\frac{\sigma_r}{a_r},\quad A_\rho = 2\rho_s\frac{\delta_s}{a_s} + \rho_r\frac{\delta_r}{a_r} \qquad \text{(A1)}$$

$$a_s = \frac{2\pi R}{n_s}\cos\phi,\ a_r = \frac{\pi R}{n_s\, tg\phi}$$
$$f_{11} = \frac{\cos^3\phi}{\pi},\quad f_{12} = \frac{\cos\phi\sin^2\phi}{\pi},$$
$$f_{22} = \frac{\sin\phi}{\pi\cos\phi}\left(\sin^3\phi + \frac{E_r}{E_s}\frac{\sigma_r}{\sigma_s}\right),\ f_p = \frac{1}{\pi\cos\phi}\left(1 + \frac{\rho_r}{\rho_s}\frac{\delta_r}{\delta_s}\sin\phi\right)$$
$$B_{11} = A_{11}h,\ B_{12} = A_{12}h,$$
$$B_{22} = A_{22}h,\ B_{33} = A_{33}h,\ B_p = A_\rho h, \qquad \text{(A2)}$$

$$D_{11}=A_{11}\frac{h^3}{12},\ D_{12}=A_{12}\frac{h^3}{12},\ D_{22}=A_{22}\frac{h3}{12},\ D_{33}=A_{33}\frac{h^3}{12}$$

$$c_{11}=a_1a_{32}-a_{12}{}^2\ \ c_{12}=c_{21}=a_{11}a_{23}-a_{12}a_{13},\ c_{22}=a_{11}a_{33}-a_{13}^2,\ g_{11}=e_{22}a_{11},\ \ g_{22}=a_{11}e_{33}\ P_{ss}=a_{11}P_s,$$

$$P_S=\frac{t}{E_s\sigma_s n_s}\left[G\frac{\xi}{S}+\left(K\frac{R^2}{L^2}+\frac{Gn^2}{L^2}\right)s\right]$$

$$a_{11}=f_{11}\frac{\lambda^4}{s}+f_{12}\xi sn^2,\ a_{12}=a_{21}=2f_{12}\xi n$$

$$a_{31}=a_{13}=f_{12}\xi,\ a_{12}=(1+Z)\left(f_{12}\frac{\xi}{s}+f_{22}sn^2\right)$$

$$a_{23}=a_{32}=n\left[f_{22}\left(1+zn^2\right)s+3f_{12}z\frac{\xi}{s}\right]$$

$$a_{33}=\left[f_{11}z\frac{\lambda^4}{s^4}+f_{22}\left(1+zn^4\right)\right]s+6f_{12}zn^2\frac{\xi}{s} \qquad \text{(A3)}$$

$$a_{22}=(1+Z)\left(f_{12}\frac{\xi}{s}+f_{22}sn^2\right)$$

$$e_{11}=f_\rho\xi,\ e_{22}=e_{33}=f_\rho,\quad z=\frac{1}{12t^2},\quad t=\frac{R}{h}$$